Segundo parcial de Lógica. Grado en Matemáticas. 9 de diciembre de 2016

---

1. (2 puntos) Teoría: En el contexto de la lógica de predicados, define interpretación y asignación. Da el procedimiento recursivo para asociar elementos del dominio a los términos y valores de verdad a las fórmulas a partir de una interpretación y una asignación. Sé todo lo formal que sea posible en tus respuestas.

2. (2 puntos) Formaliza las siguientes oraciones utilizando como dominio el conjunto de los números enteros usando la sintaxis de la lógica de predicados. Define símbolos que formalizen los conceptos "*cuadrado*", "*suma*", "*producto*", "*mayor o igual que*" y "*par*". Utiliza sólo estos símbolos y símbolos de constante (que puedes denotar con números) en tu formalización (además de variables, conectivas, símbolo de igualdad y cuantificadores que necesites).

   - *El cuadrado de cualquier número es siempre mayor o igual que cero e igual al producto de ese número por sí mismo.*
   - *La suma de dos números es par si y sólo si uno de ellos es par y el otro impar.*
   - *Dado un número cualquiera siempre hay uno estrictamente mayor que él.*
   - *Hay un número mayor o igual que todos los demás.*
   - *Hay un único número par mayor o igual que 0 y menor o igual que 4.*

   (Extra, 1 punto) Formaliza la parte existencial del enunciado del teorema de la división: "*Dados dos números cualesquiera (dividendo y divisor), el segundo de ellos (divisor) distinto de cero, existen otros dos (cociente y resto) tales que el primero (dividendo) es igual al segundo (divisor) por el tercero (cociente) más el cuarto (resto), siendo además el cuarto (resto) mayor o igual que 0 y menor estrictamente que el segundo (divisor).*"
   Nota: Los "nombres" de los números están simplemente para orientar, no necesitas formalizar esa parte.

3. (2 puntos) Considera el dominio con dos elementos $D = \{a, b\}$ y las siguientes fórmulas:

   - $\varphi_1 = \forall x(P(x) \to Q(x) \vee R(x))$
   - $\varphi_2 = \forall x P(x)$
   - $\varphi_3 = \forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$
   - $\varphi_4 = \exists x P(x)$

   Determina **justificadamente** si

   a) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \vDash \varphi_3 \wedge \varphi_4$
   b) $\varphi_3 \wedge \varphi_4 \vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2$

4. (2 puntos) Define por recursión una función F que, dada una fórmula cualquiera φ de la lógica de predicados, devuelva el número de símbolos de coma más el número total de símbolos de variable (contando repeticiones) que aparecen en φ. Puedes apoyarte, si es necesario, en una función G que tenga como dominio el conjunto de los términos de la lógica de predicados y que también tendrás que definir por recursión.
   Nota: recuerda que los símbolos de coma sólo aparecen "dentro" de los símbolos de función y predicado y que aparecen tantas como la aridad menos 1.

5. (2 puntos) Demuestra la corrección del siguiente razonamiento utilizando el sistema de Gentzen:

$$\{\forall x \forall y\, (P(x,y) \to Q(x) \vee R(y))\,,\ \forall x(P(x,x) \to \neg R(x)),\ P(a,a)\} \vdash \exists x Q(x)$$